قسم الرياضيات
المرحلة الثانية

الفيزياء الرياضية
المحاضرة الثانية

الفصل الاول

Part (2) Vectors المتجهات

4. الضرب العددي Dot Product

بعد التعرف على بعض خواص المتجهات يجب الان تعريف عملية جديدة على المتجهات وتعرف "بالضرب العددي" dot Product او Scalar Product والتي ربما نأخذ متجهين وتكون مقدار عددي (رقم). فيزيائياً الضرب العددي يمكن فهمه من مبدأ الشغل حيث ان الشغل رياضياً يمثل بالضرب العددي بين القوة والازاحة وكلاهما كميات متجهة.

لنفرض المتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$، وبما ان اي متجهين لا يقعان على خط واحد يكونان مستوي، يمكن ان نفرض ان θ هي الزاوية بين المتجهين $\vec{A}, \vec{B}$ كما في الشكل (9) مع ملاحظة ان θ تكون اي قيمة من 0 الى π

مدرس مساعد
ارزوء عبد الجليل حسن

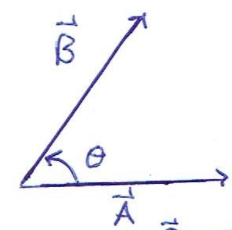


Fig (9)

الضرب العددي $\vec{A}.\vec{B}$ للمتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ تعرف على ان تكون حاصل ضرب مقدار المتجه $\vec{A}$ والمتجه $\vec{B}$ مع جيب تمام الزاوية θ المحصورة بينهما

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta$$

حيث ان: $A = |A|$, $B = |B|$ تمثل قيم المتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ على التوالي.

ناتج الضرب العددي يمكن ان يساوي عدد سالب او موجب او صفر. اعتماداً على قيمة الدالة جيب تمام الزاوية θ، وقيمة دائماً عددية

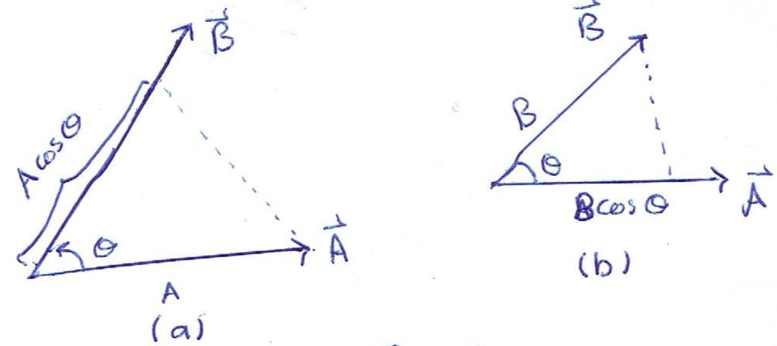
هندسياً الضرب العددي يمكن ان يكتب بالصيغة

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = (A\cos\theta)B$$

حيث ان $(A\cos\theta)$ تمثل مسقط المتجه $\vec{A}$ على اتجاه المحور $\vec{B}$. هذا المسقط موضح في الشكل (10) لذا فان الضرب العددي هو ضرب مسقط بطول $\vec{A}$ باتجاه $\vec{B}$ مع طول المتجه $\vec{B}$. كذلك يمكن كتابته كالتالي

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A\,(B\cos\theta)$$

حيث $B\cos\theta$ هو مسقط المتجه $\vec{B}$ على اتجاه $\vec{A}$ كما في الشكل (10 B) والضرب العددي يمثل ضرب طول المسقط $\vec{B}$ على اتجاه $\vec{A}$ مع طول $\vec{A}$.



Fig(10)

من تعريف الضرب العددي انه الضرب العددي لمتجهين متعامدين على بعضهما يساوي صفر لان الزاوية المحصورة بينهما تكون $\frac{\pi}{2}$ و $(\cos\frac{\pi}{2} = 0)$

مدرس مساعد
م.م. عبد الجليل حسن

خواص الضرب العددي

١- الضرب العددي للمتجه $c\vec{A}$ حيث c هو عدد حقيقي مع المتجه $\vec{B}$

$$c\vec{A}\cdot\vec{B} = c(\vec{A}\cdot\vec{B})$$

٢- الضرب بين ~~متجهين~~ متجه $\vec{C}$ مع حاصل جمع المتجهين $\vec{B}$, $\vec{A}$.

$$(\vec{A}+\vec{B})\cdot\vec{C} = \vec{A}\cdot\vec{C} + \vec{B}\cdot\vec{C}$$

٣- عملية الضرب العددي عملية ابدالية.

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$$
$$\vec{A}\cdot c\vec{B} = c(\vec{A}\cdot\vec{B})$$
$$\vec{C}\cdot(\vec{A}+\vec{B}) = \vec{C}\cdot\vec{A} + \vec{C}\cdot\vec{B}$$

تحليل المتجهات والضرب العددي

بعد التعرف على خواص الضرب العددي يمكننا التعبير الجبري عن الضرب العددي بدلالة مركباته. لنختار الاحداثيات الكارتيزية مع المتجه $\vec{B}$ باتجاه محور x الموجب ومركبة x موجبة يعني ان $\vec{B}=B_x\hat{i}$. المتجه $\vec{A}$ يمكن كتابته بالشكل التالي:

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$$

اولاً يجب ان نقوم بعملية حساب الضرب النقطي لمتجه الوحدة $\hat{i}$ مع نفسه.

$$\hat{i}\cdot\hat{i} = |\hat{i}||\hat{i}|\cos 0 = 1$$

بما ان متجه الوحدة له قيمة (1) و $(\cos 0 = 1)$ يمكن ان نلاحظ ان القاعدة نفسها تنطبق على متجه الوحدة باتجاه y و z.

$$\hat{j}\cdot\hat{j} = k\cdot k = 1$$

الضرب العددي للمتجه $\hat{i}$ مع $\hat{j}$ يساوي صفر لانهما متعامدات مع بعضهما.

$$\hat{i}\cdot\hat{j} = |\hat{i}||\hat{j}|\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$$

بالمثل الضرب العددي للمتجه $\hat{i}$ ومتجه الوحدة $\hat{k}$ ومتجه الوحدة $\hat{j}$ ومتجه الوحدة $\hat{k}$ كذلك يساوي صفر

$$\hat{i}\cdot\hat{k} = \hat{j}\cdot\hat{k} = 0$$

مدرس مساعد عبد الجليل حسن

الآن الضرب العددي للمتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ تصبح

$$\begin{aligned}
\vec{A}\cdot\vec{B} &= (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k})\cdot B_x\hat{i} \\
&= A_x\hat{i}\cdot B_x\hat{i} + A_y\hat{j}\cdot B_x\hat{i} + A_z\hat{k}\cdot B_x\hat{i} \\
&= A_x B_x(\hat{i}\cdot\hat{i}) + A_y B_x(\hat{j}\cdot\hat{i}) + A_z B_x(\hat{k}\cdot\hat{i}) \\
&= A_x B_x
\end{aligned}$$

الخطوات الاخيرة هي الاهم لانها تبين ان نقط متجهات الوحدة تحدد عملية الضرب العددي.

بما اننا فرضنا ان المتجه $\vec{B}$ باتجاه محور x مع مركبة موجبة. يكون الناتج صفر او موجب او سالب اعتماداً على مركبة x للمتجه $\vec{A}$. في الشكل (11) تم

توضح جميع الحالات .

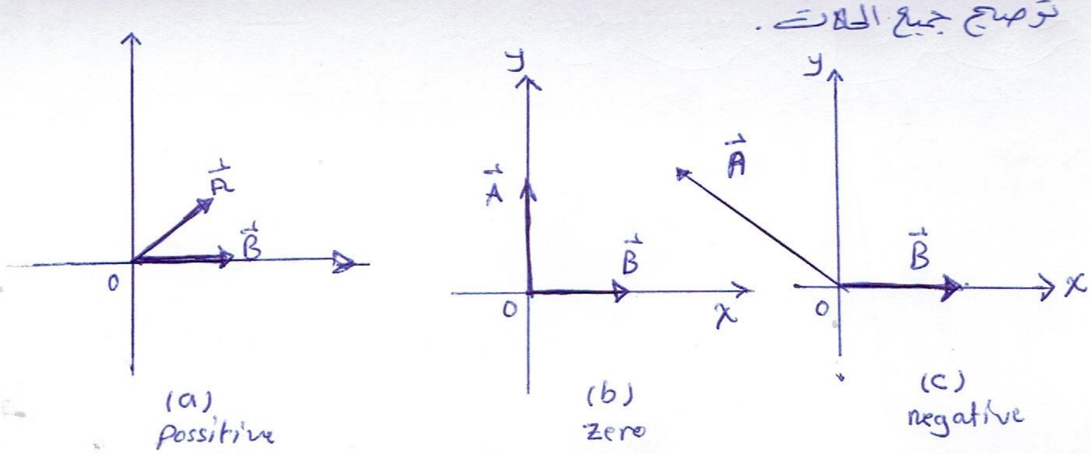


Fig (11)

ناتج الضرب النقطي يمكن تعميمها بسهولة لاي متجه اعتباطي .

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$$

and

$$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$$

to yield :

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

5- الضرب الاتجاهي Cross Product

الآن يجب ان نتعرف على النوع الثاني من ضرب المتجهات والذي يعرف بالضرب الاتجاهي "Cross product" والذي فيه يتم اخذ متجهين وتكوين متجه جديد . الضرب الاتجاهي نوع من انواع قوانين الضرب التي تدير فضاء المتجه (قانون جمع المتجهات) الى جبر المتجهات (قوانين جمع وضرب المتجهات). اول عملية ضرب للمتجهات ستكون المبدأ الفيزياوي للعزم حول النقطة P والتي يمكن وصفها رياضياً بالضرب الاتجاهي لمتجه من النقطة P الى حيث يكون تأثير القوة ومتجه القوة.

لنفترض المتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$. بما ان اي متجهين يكونان مستوي ، نعرف الزاوية θ التي تمثل الزاوية بين المتجه $\vec{A}$ والمتجه $\vec{B}$ كما مبين في الشكل (12). قيمة الضرب الاتجاهي $\vec{A}\times\vec{B}$ للمتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ تعرف بضرب مقدار المتجه $\vec{A}$ و قيمة المتجه $\vec{B}$ مع جيب الزاوية θ المحصورة بينهما .

$$\vec{A}\times\vec{B} = AB\sin\theta$$

بحيث ان A و B يمثل مقدار المتجه $\vec{A}$ و $\vec{B}$ على التوالي. ~~where A and B~~

الزاوية θ المحصورة بين المتجهين محددة بين $0 \le \theta \le \pi$ مع التأكد ان $\sin\theta \ge 0$

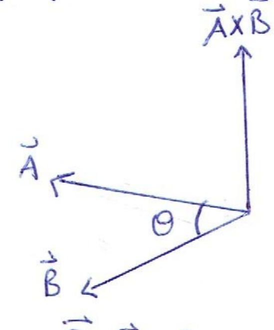


Fig (11)

اتجاه ناتج الضرب الاتجاهي يعرف كمايلي: المتجه $\vec{A}$ و $\vec{B}$ من المستوى. نفرض المتجه عمودي على المستوى. هنالك احتماليتين كما مبين في الشكل (11) يجب اختيار احد الاتجاهين للضرب الاتجاهي $\vec{A}\times\vec{B}$ باستخدام الطريقة التي تعرف بقاعدة الكف الايمن.

قاعدة الكف الايمن

الخطوة الاولى هو اعادة رسم المتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ بحيث ان ذيلهما متصلين بعد ذلك نرسم بعدها ارسم منحني يبدأ من المتجه $\vec{A}$ وينتهي عند المتجه $\vec{B}$. لف اصابعك ليدك اليمنى بنفس الاتجاه الذي رسم به المنحني. الابهام الايمن يمثل اتجاه الضرب الاتجاهي $\vec{A}\times\vec{B}$ لاحظ شكل (12)

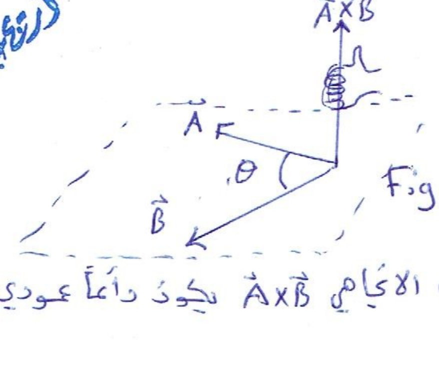


Fig (12)

يجب ان نتذكر دائماً ان اتجاه الضرب الاتجاهي $\vec{A}\times\vec{B}$ يكون دائماً عمودي على المستوى الذي يحوي $\vec{B}$, $\vec{A}$

هندسياً يمكن ان نعبر عن الضرب الاتجاهي كمايلي

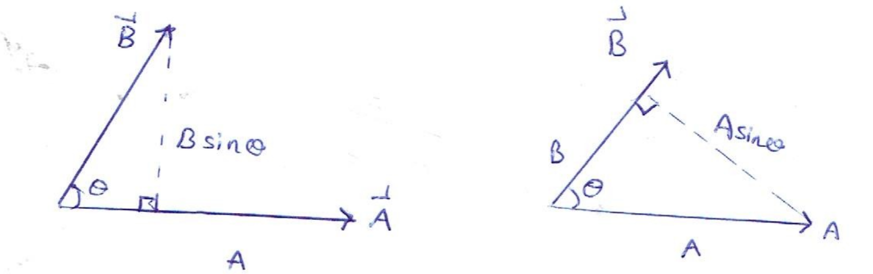
$$\vec{A}\times\vec{B} = A(B\sin\theta)$$

المتجه A و B يكونان متوازي اضلاع. مساحة متوازي الاضلاع تساوي القاعدة × الارتفاع. والتي تعطي من قيمة الضرب الاتجاهي. في الشكل (13) طريقتان مختلفتان للتعبير عن

عملية حساب المساحة (القاعدة $\times$ الارتفاع). كما مبين في الشكل ($13a$) المقدار $B\sin\theta$ يمثل مسقط المتجه $\vec{B}$ ~~A~~ العمودي باتجاه المتجه $\vec{A}$. كذلك يمكن ان نكتب

$$\vec{A}\times\vec{B}=(A\sin\theta)B$$

حيث ($A\sin\theta$) يمثل مسقط المتجه ~~A~~ $\vec{A}$ العمودي على اتجاه $\vec{B}$. كما في شكل ($13b$)



Fig(13)

الضرب الاتجاهي للمتجهين المتوازيين بنفس الاتجاه او المتوازيين بعكس الاتجاه يساوي صفر لان الزاوية المحصورة بين المتجهين تكون صفر. او π ولان $\sin\pi=0$ ، $\sin 0=0$
هندسياً المتجهين المتوازيين ليس لها مركبة عمودي على بعضهما.

مدرس مساعد
أريج عبد الخليل حسن

خواص الضرب الاتجاهي

١- عملية الضرب الاتجاهي ~~الاتجاهي~~ ليست عملية ابدالية بحيث ان تغيير تسلسل المتجهات تغير اتجاه المتجه الناتج من الضرب. حسب قاعدة اليد الايمن

$$\vec{A}\times\vec{B}=-\vec{B}\times\vec{A}$$

٢- الضرب الاتجاهي بين المتجه $c\vec{A}$ و المتجه $\vec{B}$ بحيث ان c هو عدد حقيقي (بعض الاحيان)

$$c\vec{A}\times\vec{B}=c(\vec{A}\times\vec{B})$$

$$\vec{A}\times c\vec{B}=c(\vec{A}\times\vec{B})$$

٣- الضرب الاتجاهي للمتجه $\vec{C}$ مع حاصل جمع $\vec{A}$ مع $\vec{B}$

$$(\vec{A}+\vec{B})\times\vec{C}=\vec{A}\times\vec{C}+\vec{B}\times\vec{C}$$

$$\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{C}$$

تحليل المتجهات والضرب الاتجاهي :

اولا يجب ان نقوم بعملية حساب الضرب الاتجاهي لمتجهات الوحدة $\hat{i}$ و $\hat{j}$

$$|\hat{i} \times \hat{j}| = |\hat{i}||\hat{j}| \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

على اعتبار ان قيمة $1 = |\hat{j}| , |\hat{i}|$ و $\sin \frac{\pi}{2} = 1$. حسب قاعدة الكف الايمن اتجاه $\hat{i} \times \hat{j}$ هو $+\hat{k}$ كما في الشكل (14) لذلك $\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$

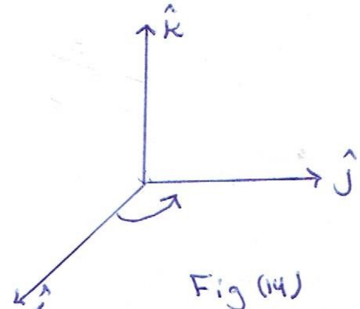


Fig (14)

لاحظ ان القاعدة تنطبق ايضاً على متجهات الوحدة باتجاه y و z .

$$\hat{j} \times \hat{k} = \hat{i} \quad \text{و} \quad \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$$

وباستخدام خاصية اللاابدالية نجد ان

$$\hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k} \qquad \hat{i} \times \hat{k} = -\hat{j} \qquad \hat{k} \times \hat{j} = -\hat{i}$$

الضرب الاتجاهي لمتجه الوحدة $\hat{i}$ مع نفسه يساوي صفر لانهما متوازيين $\sin 0 = 0$

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) \times (B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k})$$

مدرس مساعد
[illegible]

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(A_y B_z - A_z B_y) - \hat{j}(A_x B_z - B_x A_z) + \hat{k}(A_x B_y - B_y A_x)$$